

یک اندازه کارایی جدید برای واحدهای تصمیم‌گیری در تحلیل پوششی داده‌ها با ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب

چکیده

در این مقاله با توجه به وجود برخی از مولفه‌های نامطلوب در ورودی و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیری مجموعه امکان تولید مناسبی ارایه و سپس روش جدیدی را برای اندازه‌گیری کارایی پیشنهاد داده ایم.

کلمات کلیدی: اندازه کارایی، ورودی و خروجی نامطلوب، تحلیل پوششی داده‌ها.

مقدمه

هنگامی که ورودی و خروجی نامطلوب در عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری وجود نداشته باشد اساس مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای افزایش کارایی بر افزایش خروجی یا کاهش ورودی استوار است. اما در بسیاری از مسایل کاربردی همچنان که کوپمن (۱۹۵۱) اشاره داشته است ممکن است بعضی از ورودی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده بگونه‌ای باشند که افزایش این

ورودی ها باعث افزایش کارایی و کاهش آن موجب کاهش کارایی گردد. مانند عملیات بازیافت که لازم است ورودی های نامطلوب برای بهبود سطح کارایی افزایش داده شوند و یا بعضی از خروجی های واحدهای تصمیم گیرنده ممکن است بگونه ای باشند که افزایش این خروجی ها باعث کاهش کارایی و کاهش آن موجب افزایش کارایی گردد. ضایعات یک کارخانه را در نظر بگیرید که به عنوان خروجی نامطلوب باید برای افزایش کارایی، کاهش پیدا کنند. (آلن (۱۹۹۹) و اسمیت (۱۹۹۰) را ببینید.)

روشهای موجود برای نحوه بررسی و اعمال خروجی های نامطلوب در تحلیل پوششی داده ها به دو دسته روشهای مستقیم و روشهای غیر مستقیم دسته بندی می شوند. در روشهای غیر مستقیم ورودی ها و خروجی های نامطلوب در هر واحد تصمیم گیرنده توسط یک تابع یکنواخت نزولی به ورودی ها و خروجی های مطلوب تبدیل و سپس با استفاده از مدلهای استاندارد تحلیل پوششی داده ها کارایی واحدها ارزیابی می شود. از این روشها می توان به روش [ADD] کوپمن (۱۹۵۱) و روش [MLT] گالنی و رول (۱۹۸۹) برای وارد کردن ورودی ها و خروجی های نامطلوب اشاره کرد.

روشهای مستقیم روشهایی هستند که مفروضاتی را در مجموعه امکان تولید بکار می برند، بطوریکه در ارزیابی ورودی و خروجی مناسبی به دست آید (مانند روش فار ۱۹۸۹). در این مقاله مجموعه امکان تولید متناسب با مفهوم ورودی ها و خروجی های نامطلوب ارائه و سپس در ماهیت ورودی میزان کارایی واحدهای تصمیم گیرنده را بررسی کرده ایم. مقاله با نتیجه گیری از مباحث ارائه شده خاتمه می یابد.

۱. مجموعه امکان تولید

مجموعه امکان تولید را می توان بصورت زیر نشان داد:

$$T = \{(x, y) \mid \text{ورودی } x \text{ بتواند } y \text{ را تولید کند}\}$$

متناظر با هر خروجی y مجموعه $L(y)$ را بصورت زیر بصورت تعریف می کنند:

$$L(y) = \{x \mid (x, y) \in T\}$$

در واقع $L(y)$ تابعی است که y را به یک زیر مجموعه از ورودی نقش می کند بطوری که این ورودی ها بتوانند خروجی y را تولید کنند.

در این مقاله ورودی ها را بصورت جفت مرتب $x = (x^D, x^I)$ در نظر گرفته ایم، بطوریکه $x^D = (x_1^D, \dots, x_{m_1}^D)$ و $x^I = (x_1^I, \dots, x_{m_2}^I)$ به ترتیب ورودیهای مطلوب و نامطلوب می باشند. همچنین $y = (y^g, y^b)$ خروجی ها می باشند بطوریکه $y^g = (y_1^g, \dots, y_{s_1}^g)$ خروجی های مطلوب و $y^b = (y_1^b, \dots, y_{s_2}^b)$ خروجی های نامطلوب هستند.

تعریف: واحد تصمیم گیرنده (x^D, x^I, y^g, y^b) را گوئیم بر واحد (x'^D, x'^I, y'^g, y'^b) غالب است هرگاه $x^D \leq x'^D$ ، $x^I \geq x'^I$ ، $y^g \geq y'^g$ و $y^b \leq y'^b$ با یک نامساوی اکید موجود باشد. یعنی:

$$\begin{pmatrix} -x^D \\ x^I \\ y^g \\ -y^b \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} -x'^D \\ x'^I \\ y'^g \\ -y'^b \end{pmatrix}$$

یک واحد تصمیم گیرنده کارا است، هرگاه در T واحدی نباشد که بر آن غالب باشد.

مجموعه امکان تولید T را با ویژگی های زیر در نظر می گیریم:

۱. T محدب است.

۲. T بسته است.

۳. خاصیت یکنواختی برای ورودی ها و خروجی های مطلوب یعنی:

$$\forall u \in R_+^{m_1}, v \in R_+^{s_1}, (x^D, x^I, y^g, y^b) \in T \Rightarrow (x^D + u, x^I, y^g - v, y^b) \in T$$

این خاصیت برای ورودی ها و خروجی های نامطلوب لزوما نمی تواند وجود داشته باشد، زیرا در

این صورت T فاقد واحد کارا خواهد بود.

با در نظر گرفتن شرایط فوق مجموعه T را بصورت زیر برآورد می کنیم.

$$T = \left\{ (x^D, x^I, y^b, y^g) \left| \begin{array}{l} x^D \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^D, x^I = \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^I, y^g \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^g, y^b = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^b \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, n \end{array} \right. \right\}$$

۲. تعیین عدد (اندازه) کارایی جدید

برای تعیین کارایی واحد تحت ارزیابی در ماهیت ورودی به دنبال بهبود واحد تحت ارزیابی با کاهش ورودی مطلوب و افزایش ورودی نامطلوب هستیم و در ماهیت خروجی برای بهبود واحد تحت ارزیابی خروجی مطلوب را افزایش و خروجی نامطلوب را کاهش می دهیم. با در نظر گرفتن این مطلب فارل (۱۹۸۹) برای افزایش خروجی مطلوب و کاهش خروجی نامطلوب مدلی را ارائه داد اما مشکل این مدل فرم غیر خطی آن است.

روش $[TR\beta]$ (علی و سیفورد ۱۹۹۰) در حالیکه خروجی مطلوب را افزایش می دهد به طور همزمان خروجی نامطلوب را کاهش می دهد اما مشکل این روش آن است که اندازه کارایی به مقدار β بستگی دارد.

بعضی از روشهای دیگر همانند [WD] (فار ۱۹۸۹) و [MLT] (گالنی و رول ۱۹۸۹) بگونه ای هستند که کاهش خروجی نا مطلوب فقط همراه با کاهش خروجی مطلوب ممکن می باشد. در صورتیکه ما معتقدیم، بهبود کارایی در صورتی حاصل می شود که خروجی های مطلوب و نامطلوب به ترتیب افزایش و کاهش پیدا کنند.

فرض کنید $DMU_o = (x_o^D, x_o^I, y_o^g, y_o^b)$ واحد تحت ارزیابی باشد. متناظر با خروجی

$y_o = (y_o^g, y_o^b)$ برای مجموعه ورودی های $L(y_o^g, y_o^b)$ ، با توجه به تعریف داریم:

$$L(y_o^g, y_o^b) = \{(x^D, x^I) | (x^D, x^I, y_o^g, y_o^b) \in T\}$$

و زیر مجموعه ای از $L(y_o^g, y_o^b)$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\partial^s L(y_o^g, y_o^b) = \{(x^D, x^I) | \forall (u, v) \geq 0, (u, v) \neq 0 \text{ then } (x^D - u, x^I + v) \notin L(y_o^g, y_o^b)\}$$

$\partial L(y_o^g, y_o^b)$ شامل ورودی های متناظر با تمام واحد های تصمیم گیرنده کارا می باشد که

خروجی (y_o^g, y_o^b) می توانند تولید کنند.

در تعیین کارایی DMU_o بطور همزمان بدنبال بیشترین کاهش x_o^D و بیشترین افزایش x_o^I در جهت

سوق دادن واحد تحت ارزیابی بسمت مرز کارای $\partial L(y_o^g, y_o^b)$ هستیم. بنابر این داریم:

$$\gamma_o = \text{Max} \quad \beta_o - \alpha_o$$

st.

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^D + s^- = \alpha_o x_o^D$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j^I = \beta_o x_o^I$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^g - s^+ = y_o^g \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^b = y_o^b$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$$

$$\beta_o \geq 1$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{for all } j = 1, \dots, n$$

محدودیت $\beta_o \geq 1$ در مدل (۱) از کاهش α_o همراه با کاهش β_o جلوگیری می کند.

قضیه ۱: واحد تحت ارزیابی در مدل (۱) کارا است اگر و تنها اگر:

$$1. \quad \alpha_o^* = \beta_o^* = 1$$

۲. متغیرهای کمکی در تمام جوابهای بهینه صفر باشد.

قضیه ۲: اگر α_o^* و β_o^* جوابهای بهینه مدل (۱) در ارزیابی DMU_o باشد، آنگاه:

$$(\alpha_o^* x^D - s^-, \beta_o^* x^I) \in \partial^S L(y_o^b, y_o^g)$$

است (s^- یکی از جوابهای بهینه می باشد).

با توجه به قضیه ۱ همواره $\beta_o^* = 1$ کارایی و $\beta_o^* > 1$ نمایانگر میزان ناکارایی ورودی های

نامطلوب است. پس در هر حالت $0 < \frac{1}{\beta_o^*} \leq 1$ می تواند کارایی ورودی های نامطلوب واحد

تحت ارزیابی را مشخص کند. همچنین $\alpha_o^* \leq 1$ نشانگر کارایی ورودی های مطلوب واحد تحت

ارزیابی می باشد. پس می توان میانگین (هندسی) وزنی این دو را به عنوان عدد کارایی واحد تحت ارزیابی در نظر گرفت. یعنی:

$$Efficiency \ Number \ DMU_o = m_1 + m_2 \sqrt{\frac{(\alpha_o^*)^{m_1}}{(\beta_o^*)^{m_2}}} \quad (2)$$

در این صورت:

$$0 < Efficiency \ Number \ DMU_o \leq 1$$

$Efficiency \ Number \ DMU_o$ می تواند میزان کارایی واحد تحت ارزیابی را مشخص کند.

قضیه ۳: در ارزیابی DMU_o توسط مدل (۱) این واحد تصمیم گیرنده کارا است اگر و تنها اگر

$$Efficiency \ Number \ DMU_o = 1.$$

قضیه ۴: اگر DMU_k بر DMU_j غالب باشد و γ_k و γ_j جواب های بهینه مدل (۱) در ارزیابی

این واحدها باشند آنگاه $\gamma_k \leq \gamma_j$.

اثبات: فرض می کنیم، (α_k^*, β_k^*) و (α_j^*, β_j^*) جوابهای بهینه مدل (۱) در ارزیابی واحدهای

DMU_k و DMU_j باشند در این صورت داریم:

$$\begin{pmatrix} -x_j^D \\ x_j^I \\ y_j^g \\ -y_j^b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -x_k^D \\ x_k^D \\ y_k^g \\ -y_k^b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\alpha_k^* x_j^D \\ \beta_k^* x_j^I \\ y_j^g \\ -y_j^b \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -\alpha_k^* x_k^D \\ \beta_k^* x_k^I \\ y_k^g \\ -y_j^b \end{pmatrix}$$

از طرفی می دانیم که:

$$(\alpha_k^* x_k^D, \beta_k^* x_k^I, y_k^g, y_k^b) \in T$$

بنابر این می توان نتیجه گرفت:

$$(\alpha_k^* x_j^D, \beta_k^* x_j^I, y_j^g, y_j^b) \in T$$

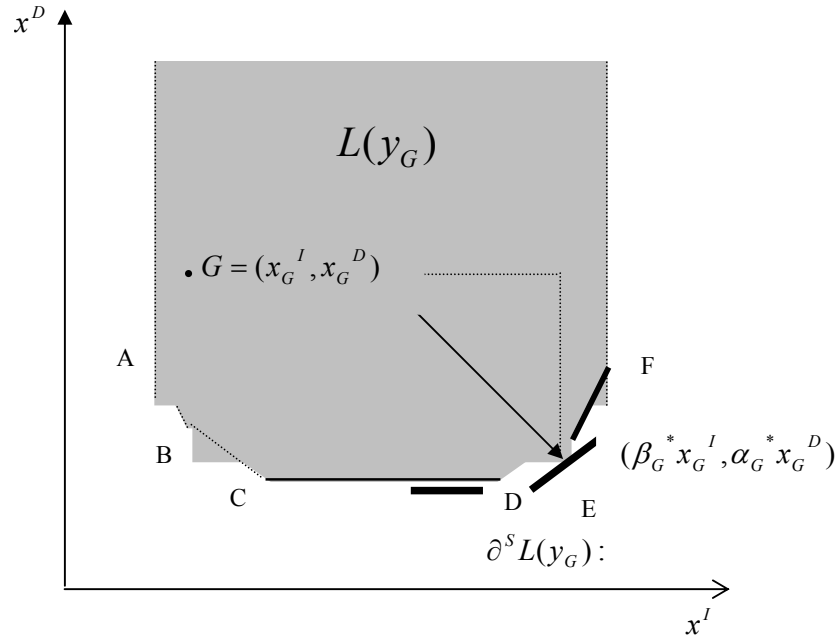
پس (α_k^*, β_k^*) می تواند یک جواب شدنی برای مدل (۱) در ارزیابی DMU_j باشد. بنابر این $\gamma_j \geq \alpha_k^* + \beta_k^*$ یعنی $\gamma_j \geq \gamma_k$ می باشد، و حکم ثابت است.

مثال ۱: هفت واحد تصمیم گیرنده با یک ورودی مطلوب و یک ورودی نا مطلوب برای تولید یک خروجی مطلوب نرمال شده در سطح ۱، در نظر می گیریم. داده های این واحد های تصمیم گیری در جدول ۱ داده شده است.

در شکل ۱ دیده می شود واحد های تصمیم گیرنده D ، E و F بر روی $\partial^S L(y_G)$ قرار دارند، پس کارا می باشند. از طرفی واحد های تصمیم گیرنده دیگر از طریق تصویر آنها بر روی $\partial^S L(y_G)$ (مرز کارا) کارایشان بررسی شده است.

جدول ۱: مشخصات هفت واحد تصمیم گیرنده، و ارزیابی عدد جدید کارایی

$DMU's$	x^D	x^I	y^g	β^*	α^*	Efficiency Number $DMU's$
A	۳	۱	۱	۷	۱	/۳۷
B	۲	۲	۱	۲/۵	/۵	/۴۵
C	۱	۳	۱	۱/۶۶	۱	/۷۸
D	۱	۵	۱	۱	۱	۱
E	۲	۶	۱	۱	۱	۱
F	۳	۷	۱	۱	۱	۱
G	۴	۴	۱	۱/۷۵	/۷۵	/۵۸



شکل ۱: نمایش $L(y_G)$ مربوط به مثال ۱

در ماهیت خروجی می توان بحث مشابهی را ارائه کرد.

نتیجه گیری:

مدل پیشنهادی ما در این مقاله اندازه کارایی جدیدی را برای واحد های تصمیم گیری که بعضی از مولفه های ورودی و خروجی آنها ممکن است نامطلوب باشند، تعیین می کند. این مدل تضمین می کند واحدهای تصمیم گیرنده تحت ارزیابی با واحدی متناظر با مجموعه $\partial^S L(y_G)$ (مرز کارا) مقایسه شوند.

تشکر و قدر دانی: مولفین از حسن ظن و راهنماییهای سودمند آقایان دکتر جهانشاهلو و دکتر

حسین زاده صمیمانه سپاسگزاری می نمایند.

مراجع:

- [١] Allen, K., ١٩٩٩. DEA in the ecological context – an overview. In Wassermann. G. (Ed.), Data Envelopment Analysis in the service Sector. Galber, Wiesbaden. Pp.٢٠٣-٢٣٥.
- [٢] Ali, A.I., Seiford, L.M., ١٩٩٠. Translation invariance in data envelopment analysis. *Operation Research Letters* ٩,٤٠٣-٤٠٥
- [٣] Banker, R.D., Charnes, A., Cooper, W.W., ١٩٨٤. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science* ٣٠, ١٠٧٨-١٠٩٢.
- [٤] Koopman, T.C., ١٩٥١. "Analysis of production as an efficient combination of activities." In: Koopmans, T.C. (Ed.), Activity Analysis of production and allocation. Cowles Commission, Wiley, New York, pp. ٣٣-٩٧.
- [٥] Fare, R., Grosskopf, S., Lovell, C.A.K., Pasurka, C., ١٩٨٩. "Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: A nonparametric approach." *The Review Economics and Statistics* ٧١, ٩٠-٩٨.
- [٦] Golany, B., Roll, Y., ١٩٨٩. "An application Procedure for DEA." *Omega: The International of Management Science* ١٧,٢٣٧-٢٥٠.
- [٧] Lewis, H.F., Sexton, T.R., ١٩٩٩. "Data envelopment analysis with reverse inputs." Paper presented at North America Productivity Workshop, Union College, Schenectady, NY, July ١٩٩٩.
- [٨] Lovell, C.A.K., Pastor, J.T., ١٩٩٥. "Units invariant and translation invariant DEA models". *Operations Research Letters* ١٨,١٤٧ -١٥١
- [٩] Pastor, T., ١٩٩٦. " Translation invariance in DEA " :*Generalization Annals of Operations Research* ٦٦, ٩٣-١٠٢.
- [١٠] Lawrence, M. Seiford, Zhu, J., ٢٠٠٢. " Modeling undesirable factor in efficiency evaluation". *European Journal of Operational Research* ١٤٢, ١٦-٢٠.
- [١١] Smith, P., ١٩٩٠. " Data envelopment analysis applied to financial statements". *Omega: The International of Management Science* ١٨,١٣١-١٣٨.